

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКТНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

Л.Н. Ясницкий, С.Л. Гладкий, И.И. Никитенко, М.А. Тарасов

1. Введение: актуальность проблемы

Решение краевых задач математической физики, начавшееся в конце XVIII, начале XIX вв. с основополагающих работ Ж.Л. Д'Аламбера и Ж.Б.Ж. Фурье, уже на протяжении более чем двух веков является одним из ведущих направлений математического моделирования, применяемого в инженерных расчетах. Проследим историю эволюции методов решения краевых задач, отмечая трудности и проблемы, с которыми сталкивались их авторы.

В общем виде постановку линейной краевой задачи представим следующим образом. Требуется найти функцию $U(\mathbf{x})$, удовлетворяющую в пределах некоторого тела $D \subset R^3$ дифференциальному уравнению в частных производных

$$LU(\mathbf{x}) = L^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (1)$$

а на поверхности S тела D – граничным условиям

$$BU(\mathbf{x}) = B^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (2)$$

где L и B – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами; $L^*(\mathbf{x})$ и $B^*(\mathbf{x})$ – заданные функции координат \mathbf{x} .

Согласно методу разделения переменных Фурье решение краевой задачи (1)-(2) находится в виде бесконечной суммы

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(\mathbf{x}), \quad (3)$$

в которой c_n – постоянные коэффициенты, а $U_n(\mathbf{x})$ – функции координат.

Сумма (3) является аналитическим выражением, которое тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и краевому условию (2), поэтому говорят, что она является точным аналитическим решением краевой задачи (1)-(2).

В XIX – XX вв. с помощью метода разделения переменных Фурье удалось получить ряд точных аналитических решений краевых задач для простейших областей: круга, шара, цилиндра, параллелепипеда, бесконечного слоя и т.д., называемых каноническими областями. Для более сложных расчетных областей, встречающихся в инженерной практике, применение метода разделения переменных Фурье наталкивалось на

серьезные трудности. Поэтому математики смягчили задачу. Вместо нахождения точных аналитических решений они стали ограничиваться приближенными аналитическими решениями краевых задач, которые отличаются от точных решений на некоторую малую величину погрешности $\varepsilon(\mathbf{x})$. Появились три группы приближенных аналитических методов.

1. Методы типа Ритца.

Решение краевой задачи (1)-(2) ищется в виде ограниченной суммы

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N c_n U_n(\mathbf{x}), \quad (4)$$

которая строится так, что она приближенно удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1) и точно – краевым условиям (2).

2. Методы типа Трэффтца.

Решение краевой задачи (1)-(2) ищется в виде ограниченной суммы (4), которая строится так, что она, в противоположность методу Ритца, наоборот – точно удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1) и приближенно – краевым условиям (2).

3. Методы типа Рейсснера.

Решение краевой задачи (1)-(2) ищется в виде ограниченной суммы (4), которая строится так, что она приближенно удовлетворяет и дифференциальным уравнениям (1) и краевым условиям (2).

В такой смягченной постановке краевые задачи для неканонических областей решались вплоть до середины XX в., причем с развитием приближенных аналитических методов, развивались и методы оценки погрешности приближенных решений $\varepsilon(\mathbf{x})$, что было весьма важно для использования получаемых решений в инженерной практике.

Появление быстродействующих вычислительных машин в середине XX в. предоставило новые возможности и открыло новые перспективы применения приближенных аналитических методов, однако вскоре выяснилось, что они проигрывают в эффективности другому альтернативному подходу, который оказался более приспособленным к использованию вычислительной техники. Оказалось, что если разбить область решения краевой задачи на множество мелких подобластей, и для каждой подобласти ввести гипотезы, упрощающие физические свойства среды, то процесс интегрирования дифференциальных уравнений можно свести к множеству элементарных арифметических действий – сложений, вычитаний, умножений, делений. Таким образом, краевые задачи математической физики стало возможным решать с помощью ЭВМ «с позиции грубой силы», получая решение не в виде аналитических

формул, а в виде массивов чисел. На смену классическим аналитическим методам пришли численные методы решения краевых задач. Произошло это потому, что численные методы оказалось более просто формализовать и программировать. Вскоре выяснилось еще одно преимущество численных методов перед аналитическими: компьютерные программы, реализующие численные методы, и разработанные для решения какой-либо одной краевой задачи, без существенных переделок годились и для решения других задач, принадлежащих тому же классу. Алгоритмы же, построенные аналитическими методами, такой универсальностью не обладали.

Указанные обстоятельства привели к тому, что на современном рынке программных средств, предназначенных для решения краевых задач, имеется множество универсальных программных пакетов, основанных на численных методах, таких как ANSYS, COSMOS, LS-DYNA, NASTRAN, PATRAN, FEMLAB, APM WINMASHIN, BEASY, и практически отсутствуют программные пакеты, реализующие аналитические методы.

Таким образом, эволюция развития методов решения краевых задач привела к тому, что к началу XXI в. подавляющее большинство инженерных задач стали решать с применением универсальных пакетов, реализующих численные методы. Эти пакеты позволяют инженерам получать численные решения краевых задач практически любой степени сложности. Но возникла другая серьезная проблема: оценить погрешности таких численных решений для сложных инженерных задач, как правило, не представляется возможным. В книге Л.Н.Ясницкого и Т.В.Данилевич «Современные проблемы науки» [1] эта парадоксальная ситуация названа «современным кризисом прикладной математики, который, судя по катастрофическому росту техногенных аварий и катастроф, грозит перерасти в кризис современной цивилизации».

Дело в том, что решения, получаемые численными методами, представляют собой массивы чисел, о погрешности которых можно судить только по тому, как эти числа ведут себя с увеличением количества разбиений расчетной области. Обычно полагают, что результатам можно доверять, если они перестают изменяться с измельчением сетки. Однако уже давно показана теоретическая несостоятельность такого мнения. Во-первых, теоремы, из которых следует сходимости приближенных численных решений к точным, доказаны при условии выполнения допущений, которые в инженерной практике обычно не выполняются. Во-вторых, с измельчением конечноэлементных сеток всегда ухудшается обусловленность матрицы системы разрешающих алгебраических уравнений. Так, в случае решения двумерной краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка и применения равномерной сетки с линейными функциями формы имеет место зависимость:

$$\alpha = Ch^{-2}, \quad (5)$$

в которой α – спектральное число обусловленности матрицы системы алгебраических уравнений, h – максимальный размер элемента, C – константа, зависящая от особенностей краевой задачи. Согласно этой формуле при уменьшении h увеличивается α , т.е. коэффициенты матрицы системы алгебраических уравнений хуже обуславливают ее решение: малые изменения коэффициентов матрицы начинают приводить к большим изменениям решения системы. Это значит, что погрешности, связанные, например, с неизбежным при компьютерных вычислениях округлением коэффициентов матрицы, или вносимые в эти коэффициенты в процессе их формирования, все сильнее и сильнее влияют на результат решения системы. А это, в свою очередь, означает, что при $h \rightarrow 0$ приближенные конечно-элементные решения сходятся вовсе не к искомому решению краевой задачи, как схематично проиллюстрировано на рис. 1.

Из приведенного анализа со всей очевидностью следует, что к результатам, полученным численными методами, следует относиться крайне осторожно. Именно проблема оценки погрешности является серьезнейшим недостатком численных методов, что делает актуальным поиск иных, более надежных методов и подходов.

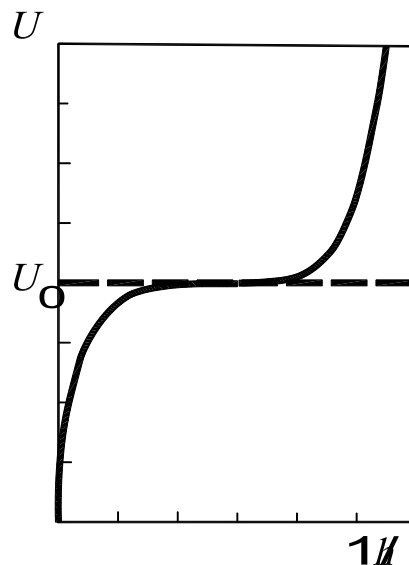


Рис. 1. Характерная зависимость численного решения краевой задачи от максимального размера конечно-элементной сетки h . U_0 – точное решение задачи

Погрешности приближенных аналитических методов

Попробуем сопоставить между собой приближенные аналитические

методы с точки зрения их надежности.

Начнем с метода Треффтца. Согласно изложенному выше, решение, полученное методом Треффтца, точно удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1) и приближенно – краевым условиям (2). Это значит, что вместо краевой задач (1)-(2) метод Треффтца приводит к точному аналитическому решению некоторой другой краевой задачи с несколько измененными краевыми условиями:

$$L U(x) = L^*(x), \quad x \in D, \quad (6)$$

$$B U(x) = B^{**}(x), \quad x \in S, \quad (7)$$

Причем разницу между заданным граничным значением $B^*(x)$ и измененным граничным значением $B^{**}(x)$ в каждом конкретном случае можно легко подсчитать. Можно всегда подставить получившееся в результате применения метода Треффтца решение в левую часть формулы (2) и, произведя вычисления этой части на границе расчетной области (при $x \in S$), воссоздать постановку измененной краевой задачи, которую методом Треффтца удалось решить точно. И, наконец, можно всегда оценить с инженерной точки зрения возможность изменения самой постановки краевой задачи – подмены исходной краевой задачи (1)-(2) на измененную краевую задачу (6)-(7). И если такая подмена задач с инженерной точки зрения возможна, то вопрос об оценке погрешности решения, полученного методом Треффтца, снимается в принципе.

Например, пусть нам требовалось рассчитать температуру в теле какой-либо сложной детали, на поверхности S которой задана температура 500°C . Применяя метод Треффтца, мы найдем функцию $U(x)$, которая тождественно удовлетворяет дифференциальным уравнениям краевой задачи, а на поверхности детали граничные условия выполняются приближенно. Например, вычисляя значения функции $U(x)$ на S мы видим, что вместо положенных 500°C функция $U(x)$ на поверхности детали изменяет свое значение в пределах от 499°C до 501°C . Таким образом, разница между заданным граничным значением температуры $B^*(x)$ и граничным условием измененной краевой задачи $B^{**}(x)$ не превышает 1°C . Если с инженерной точки зрения такие колебания температуры на поверхности детали не принципиальны и ими можно пренебречь, то мы вправе изменить постановку задачи – заменить $B^*(x)$ на $B^{**}(x)$ и утверждать, что эту новую краевую задачу нам удалось решить точно, т.е.

вообще без погрешности.

Итак, метод Треффтца позволяет получать точные аналитические решения краевых задач, но только не тех, которые ставились изначально, а задач, отличающихся от заданных своими краевыми условиями на некоторую малую величину, причем эта разница в краевых условиях в каждом конкретном случае может быть легко оценена.

Теперь обратимся к методу Ритца. Рассуждая аналогичным образом, видим, что применение метода Ритца приводит к точному аналитическому решению краевой задачи:

$$\begin{aligned}LU(\mathbf{x}) &= L^{**}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (8) \\BU(\mathbf{x}) &= B^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (9)\end{aligned}$$

отличающейся от исходной краевой задачи другой формой дифференциальных уравнений. Однако, в отличие от предыдущего случая, возможность подмены исходной краевой задачи (1)-(2) на измененную (8)-(9) с инженерной точки зрения уже не представляется столь же очевидной. Такой же вывод мы получаем и в случае применения методов типа Рейсснера.

Итак, из всех рассмотренных аналитических методов наиболее надежные решения краевых задач позволяют получать методы типа Треффтца.

Метод Треффтца и его развитие

Рассмотрим более подробно историю и проблемы применения метода Треффтца.

Этот метод был предложен в 1926 г. немецким математиком и механиком Э. Треффтцем. В своем выступлении на Втором международном конгрессе по технической механике в г.Цюрихе [2] Э.Треффтц предложил аналитический метод решения краевых задач, суть которого заключается в следующем.

Пусть требуется найти функцию $U(\mathbf{x})$, удовлетворяющую в пределах некоторого тела $D \subset R^3$ уравнению Лапласа

$$\Delta U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (10)$$

а на поверхности S тела D – граничным условиям

$$U(\mathbf{x}) = B^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (11)$$

Согласно методу Треффтца решение краевой задачи ищется в виде суммы

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N c_n U_n(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in D, \quad (12)$$

в которой $U_n(\mathbf{x})$ – базисные функции координат, выбираемые так, что каждая из них удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению (10), а c_n – постоянные коэффициенты, определяемые из условия минимума функционала

$$J(U) = \int_D (\text{grad}U(\mathbf{x}))^2 dD, \quad (13)$$

соответствующего краевому условию (11).

Поскольку каждое слагаемое суммы (12) тождественно удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению, то этим свойством обладает и вся сумма. Таким образом, искомое решение краевой задачи $U(\mathbf{x})$ тождественно удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению, а после минимизации функционала (13), оно приближенно удовлетворяет также и краевому условию (11). Как мы уже отмечали выше, это замечательное свойство метода Треффтца ставит его в особое положение по отношению к другим приближенным методам, является его серьезнейшим преимуществом, особенно важным в современных условиях, когда на первое место выступает качество и надежность расчетных результатов.

Подход, предложенный Э.Треффтцем в 1926 г., в свое время вызвал серию научных работ, посвященных вопросам его развития и применения. Среди них следует отметить фундаментальные работы Э.Рейсснера, Л.С.Лейбензона, С.Г.Михлина, М.Ш.Бирмана, Г.А.Гринберга, Л.Коллатца. Однако, несмотря на уникальные свойства и внимание математиков, метод Треффтца долгое время оставался непригодным для широкого практического применения. Дело в том, что нерешенной оставалась проблема подбора базисных функций $U_n(\mathbf{x})$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям краевой задачи и обеспечивающих сходимость метода. Только в редких случаях путем увеличения числа базисных функций N удавалось уменьшить до приемлемых значений разницу между $B^*(\mathbf{x})$ и $B^{**}(\mathbf{x})$, и обосновать, таким образом, возможность подмены исходной краевой задачи (1)-(2) на измененную краевую задачу (6)-(7). В результате, успех применения метода Треффтца всецело зависел от опыта и интуиции математика, а порой и просто от везения.

Разобраться в проблемах сходимости и корректности, построить методику выбора базисных функций, обеспечивающую успех

применения методов типа Трэффца, позволила появившаяся в 1973 г. [3] геометрическая интерпретация, суть которой поясним на примере. Пусть требуется рассчитать напряженно-деформированное состояние упругого тела D , изображенного на рис. 2, a . На поверхности S тела D заданы граничные условия в перемещениях или (и) в напряжениях.

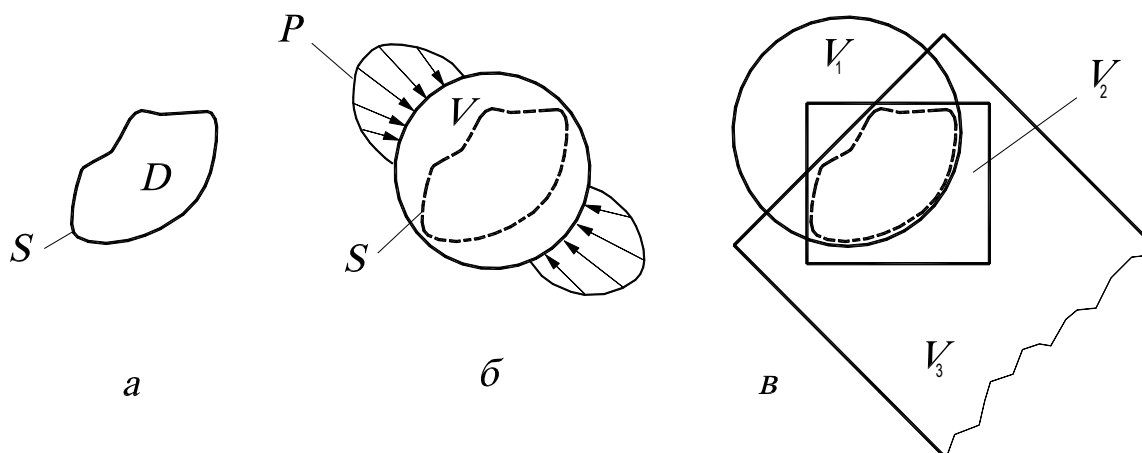


Рис. 2. Заданное тело D (a) мысленно погружается в каноническую область V (b) или в область пересечения нескольких канонических областей: $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ (c)

Наряду с D в рассмотрение вводится некоторая фиктивная каноническая область V , внутри которой мысленно (на рис. 2, b – пунктиром) выделяются контуры заданного тела. Поскольку область V является канонической, то для нее методом разделения переменных Фурье можно построить решение дифференциальных уравнений (например, уравнений теории упругости), имеющее вид ряда

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N c_n U_n(\mathbf{x}) \quad N \rightarrow \infty \quad \mathbf{x} \in V \quad (14)$$

в котором $U_n(\mathbf{x})$ – координатные функции, которые, в силу специфики метода разделения переменных Фурье, тождественно удовлетворяют решаемым дифференциальным уравнениям, а c_n – постоянные коэффициенты, определяемые граничными условиями на поверхности области V .

Это решение является общим в том смысле, что путем подбора постоянных коэффициентов c_n из него могут быть выделены частные решения, удовлетворяющие достаточно произвольным граничным условиям на поверхности тела V . Если теперь на этой поверхности создать такое нагружение P , что на контурах вписанного тела возникнут напряжения или (и) перемещения, совпадающие с заданными на S граничными условиями, то решение для V , соответствующее

нагрузению P , будет в то же время являться решением исходной задачи для тела D . Последнее справедливо в силу того, что выделенное из (14) частное решение удовлетворяет внутри тела D уравнениям теории упругости, а на его поверхности – заданным граничным условиям.

С математической точки зрения задача нагружения фиктивного тела V состоит в определении коэффициентов разложения (14), обеспечивающих выполнение заданных на S условий. Если ограничиться конечным числом слагаемых N ряда (14), эту задачу можно решить приближенно, минимизируя на этой поверхности функционал граничных условий. Последний может быть сформулирован по методу Треффтца (13), с использованием энергетических представлений, либо по методу наименьших квадратов и др.

Приведенная здесь геометрическая интерпретация к математическому аппарату Е.Треффтца позволила физически понять и объяснить причины многих неудачных попыток его применения. Например, если бы тело D на рис. 2 имело внутренние пустоты, заполненные газом высокого давления, то добиться возникновения таких граничных условий на D путем подбора нагружения P фиктивного тела V , вряд ли бы удалось. Интуиция нам подсказывает, что в качестве V здесь надо использовать многосвязную область, но об этом речь пойдет позже. Сейчас же отметим, что именно геометрическая интерпретация, впервые предложенная Л.Н.Ясницким в работе [3], позволила в этой же работе дать формулировку и первое доказательство теоремы сходимости, предложить на этой основе критерий и методику выбора базисных функций, предложить и обосновать способы оценки погрешности решений краевых задач, т.е. построить теоретические основы математического аппарата, названного впоследствии методом фиктивных канонических областей (ФКО) [4].

Остановимся на методе ФКО более подробно.

Суть критерия выбора ФКО заключается в требовании *продолжимости* искомого решения в область V . Под термином «продолжимость» понимается возможность продолжения искомого решения (как функции, удовлетворяющей дифференциальным уравнениям задачи) за границы расчетной области D во все пространство, которое занимает более крупная область V . Причем под V подразумевается минимальная, содержащая тело D , область из семейства областей, для которых имеет место используемое разложение (14).

В качестве V может быть выбрана как отдельная каноническая область (рис.2, б), так и область пересечения нескольких канонических областей $V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_K$ (рис.2, в). В этом случае вместо (14)

используется сумма K разложений, относящихся соответственно к V_1, V_2, \dots, V_K .

Критерий выбора ФКО [4] основан на том, что при выполнении условия продолжимости искомого решения в V это решение является суммой по базисным функциям для V . Тогда разложение (14) (или сумма K разложений в случае суперпозиции фиктивных областей (рис. 2, в)) при ограниченном N представляет собой отрезок ряда и для него применимы соответствующие теоремы сходимости. Если же продолжимость отсутствует, то такого ряда не существует. Сумма же в правой части формулы (14) может рассматриваться только как линейная комбинация функций $U_n(\mathbf{x})$, аппроксимирующая в D искомое решение. Но для такой аппроксимации задача нахождения коэффициентов c_n не является корректной по Адамару. В этом случае, как доказано С.Я. Гусманом [5], при увеличении N некоторые из коэффициентов c_n неограниченно возрастают. Это значит, что при практических вычислениях на компьютерах в принципе невозможно получить решение задачи с погрешностью, меньшей некоторого положительного числа ε_0 , зависящего от краевой задачи и памяти компьютера.

Нарушение продолжимости может происходить из-за наличия особенностей, т.е. точек, в которых искомое решение обращается в бесконечность, имеет разрывы, изломы и т.п. В реальных краевых задачах особые точки решений, как правило, располагаются за пределами области D (см. рис. 3), либо на ее поверхности. Таким образом, задача выбора ФКО сводится к тому, чтобы:

1. Предсказать возможные места расположения особых точек.
2. Подобрать и расположить ФКО так, чтобы особые точки искомого решения лежали за пределами области V (или на ее поверхности).

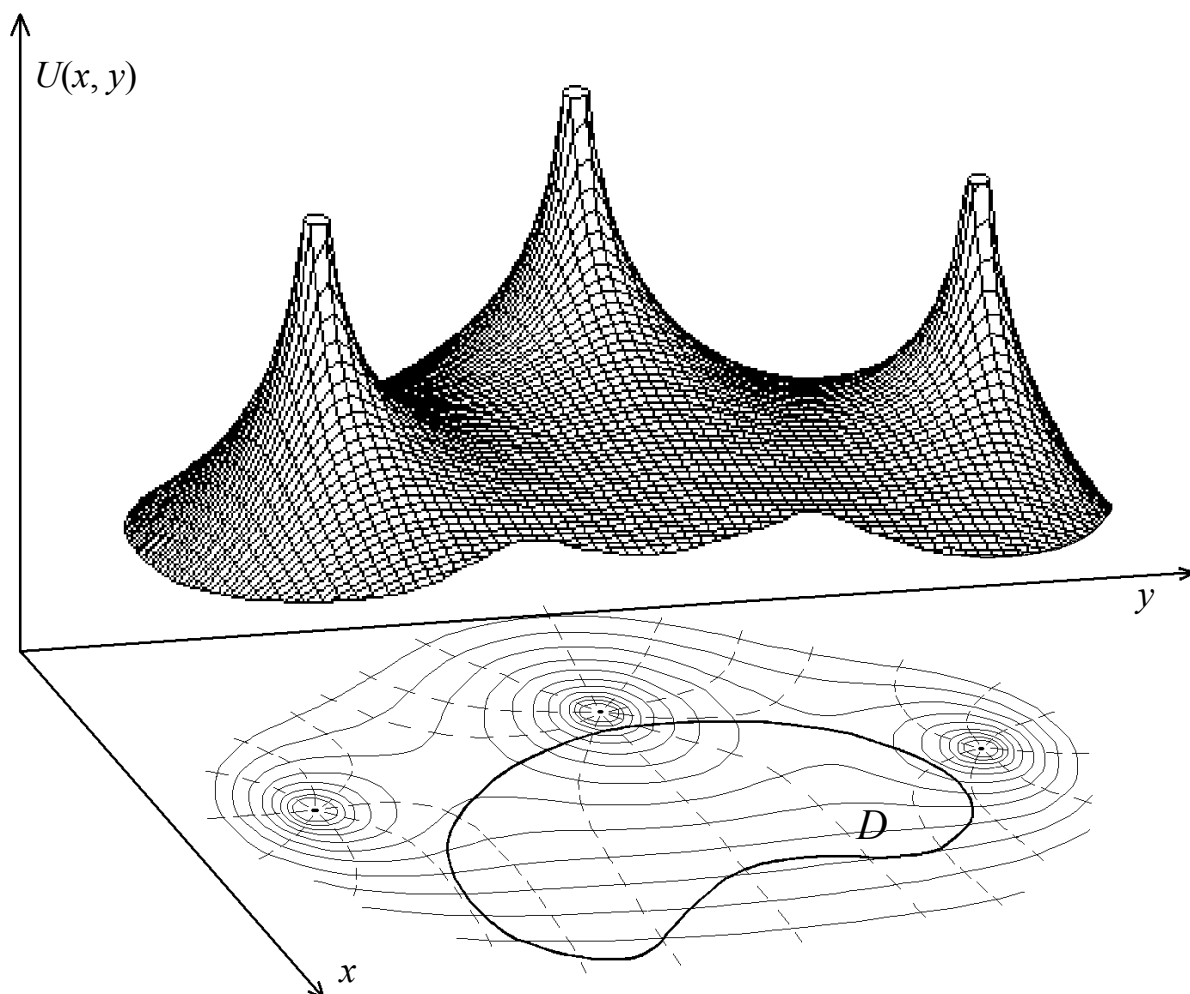
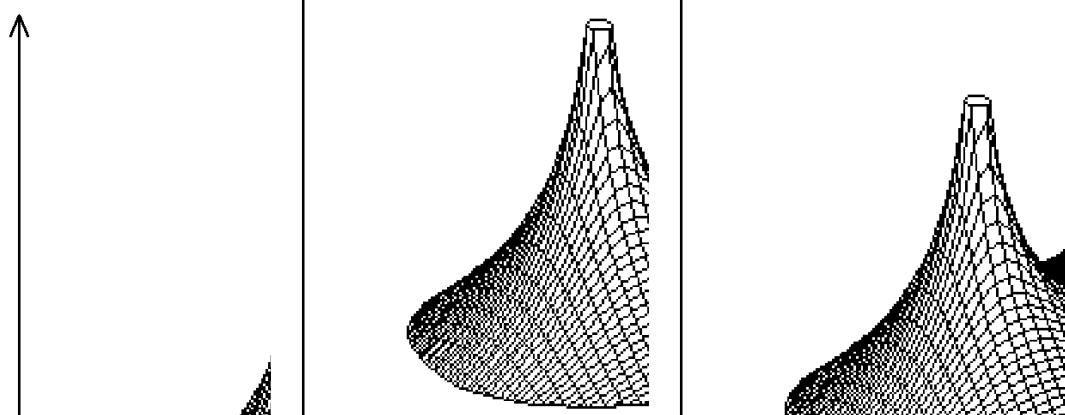


Рис. 3. Точное решение краевой задачи $U(x, y)$, которое существует как в расчетной области D , так и за ее пределами, причем в особых точках $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, расположенных вне области D , функция $U(x, y)$ обращается в бесконечность

Продemonстрируем методику выбора ФКО на следующих задачах.

Задача 1. Пусть требуется решить уравнение Лапласа для плоской области D , изображенной на рис. 4, а, причем известно, что искомое решение имеет особую точку ξ , расположенную вблизи D .



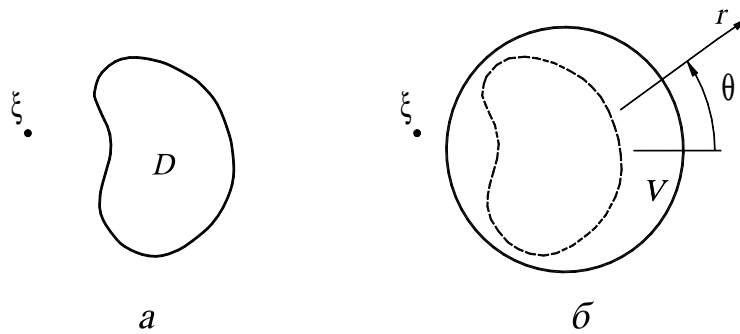


Рис. 4. Заданное тело D (а) погружается в круг V (б). ξ – особая точка искомого решения

В качестве фиктивной области V в этом случае можно использовать например круг, для которого имеет место решение уравнения Лапласа, полученное методом разделения переменных Фурье [6]:

$$U = \sum_{n=0}^N r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad N \rightarrow \infty \quad (15)$$

где r, θ – полярные координаты, a_n и b_n – постоянные коэффициенты. Согласно критерию продолжимости круг надо расположить так, чтобы он содержал область D и не содержал особую точку ξ . Пример такого расположения показан на рисунке 4, б.

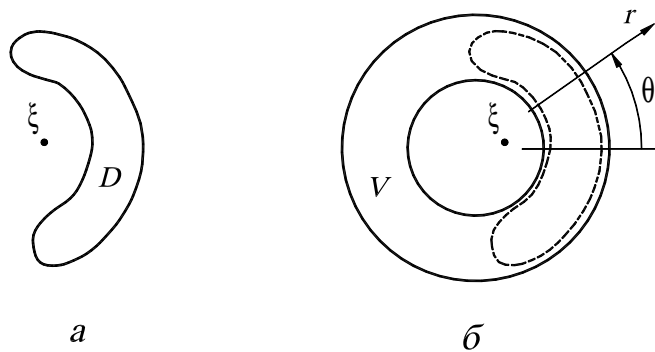


Рис. 5. Заданное тело D (а) погружается в кольцевую область V (б)

Задача 2. На рисунке 5, а приведен случай, когда подобрать круг, удовлетворяющий критерию продолжимости, не удастся. Поэтому в качестве V на рис. 5, б предложена кольцевая область, для которой (согласно [6]) имеет место разложение:

$$U = \sum_{n=-N}^N r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + c_0 \ln r \quad N \rightarrow \infty \quad (16)$$

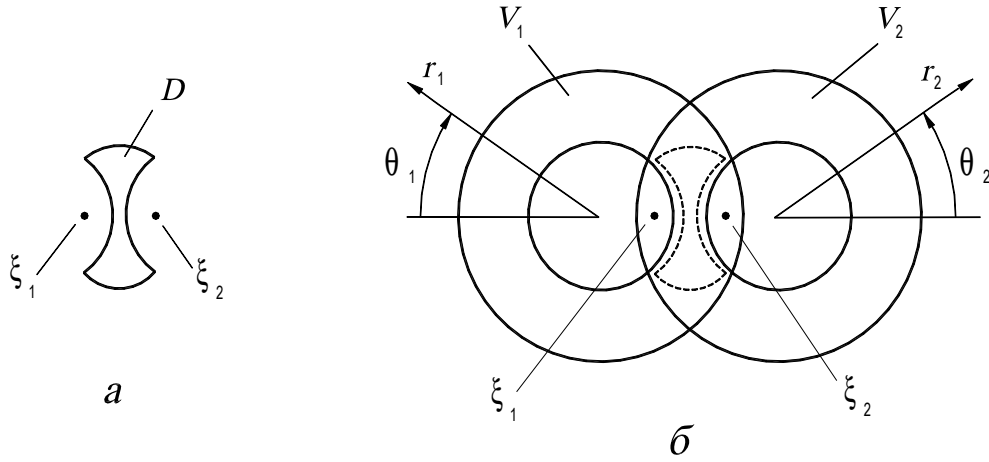


Рис. 6. Заданное тело D (а) погружается в область пересечения двух фиктивных колец V_1 и V_2 (б)

Задача 3. На рисунке 6, а приведен более сложный случай, когда вблизи области D имеются две особые точки: ξ_1 и ξ_2 . Ни круг, ни кольцо в этом случае не годятся, поэтому здесь рекомендуется прием суперпозиции ФКО [7]: D погружается в область пересечения двух кольцевых областей $V = V_1 \cap V_2$. Разложение для V представляет собой сумму двух рядов:

$$U = U_1 + U_2, \quad (17)$$

первый из которых

$$U_1 = \sum_{n=-N}^N r_1^n (a_{n1} \cos n\theta_1 + b_{n1} \sin n\theta_1) + c_1 \ln r_1 \quad N \rightarrow \infty \quad (18)$$

относится к области V_1 , а второй –

$$U_2 = \sum_{n=-N}^N r_2^n (a_{n2} \cos n\theta_2 + b_{n2} \sin n\theta_2) + c_2 \ln r_2 \quad N \rightarrow \infty \quad (19)$$

относится к области V_2 .

Как видно из рис. 5, б, особые точки ξ_1 и ξ_2 оказались за пределами области пересечения фиктивных колец и искомое решение, таким образом, продолжимо в $V = V_1 \cap V_2$.

Во всех приведенных примерах фиктивные канонические области подобраны и расположены так, что выполнено условие основной теоремы метода ФКО – теоремы продолжимости, что обеспечивает сходимость метода, а значит и успешное решение краевой задачи. Казалось бы, на этом теоретические основы метода ФКО можно считать построенными. Однако, нерешенными остаются следующие проблемы:

1. Особые точки функции, являющейся решением краевой задачи, могут быть определены по виду этой функции после того, как она построена, т.е. после того, как найдено решение краевой задачи. Но до того как задача решена, эта функция неизвестна. Поэтому в практике применения метода ФКО прогноз расположения особых точек искомого решения выполняется, как правило – интуитивно.

2. Обычно существует множество вариантов выбора и расположения фиктивных канонических областей, обеспечивающих выполнение условия продолжимости. Например, на рис. 7 приведен другой вариант выбора ФКО для решения задачи 3 – исходное тело D погружается в область пересечения трех фиктивных канонических областей $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$: двух фиктивных круговых полостей в бесконечном пространстве V_1 и V_2 , для которых общие решения уравнения Лапласа имеют вид:

$$U_1 = \sum_{n=-N}^0 r_1^n (a_{n1} \cos n\theta_1 + b_{n1} \sin n\theta_1) + c_1 \ln r_1 \quad N \rightarrow \infty \quad (20)$$

$$U_2 = \sum_{n=-N}^0 r_2^n (a_{n2} \cos n\theta_2 + b_{n2} \sin n\theta_2) + c_2 \ln r_2 \quad N \rightarrow \infty \quad (21)$$

и круг V_3 , для которого общее решение уравнения Лапласа имеет вид:

$$U_3 = \sum_{n=0}^N r_3^n (a_{n3} \cos n\theta_3 + b_{n3} \sin n\theta_3) + c_3 \ln r_3 \quad N \rightarrow \infty \quad (22)$$

Какой из вариантов выбора и расположения фиктивных канонических областей (рис. 6 или рис. 7) является наилучшим – остается нерешенной проблемой.

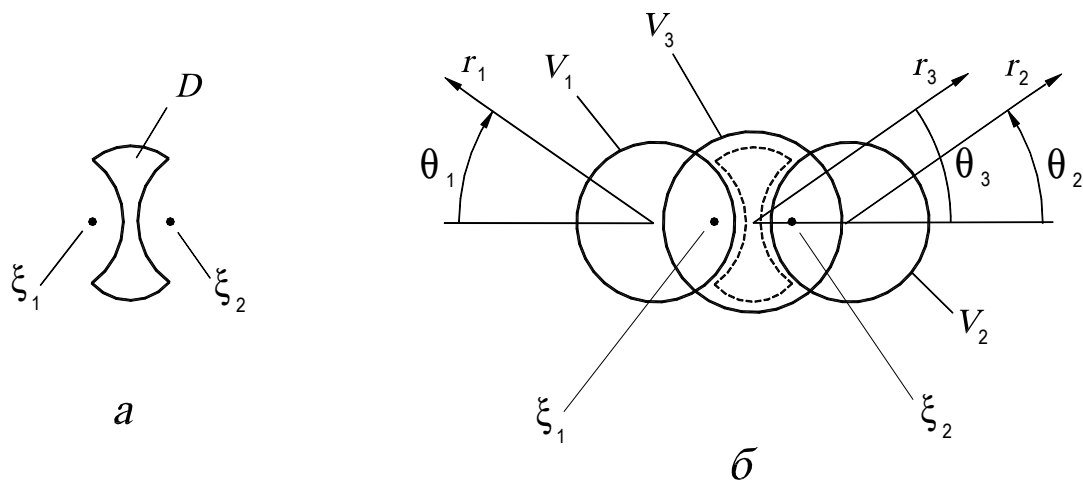


Рис. 7. Заданное тело D (а) погружается в область пересечения двух фиктивных круговых полостей V_1 и V_2 и круг V_3 (б)

Градиентный метод оптимизации расположения фиктивных канонических областей

В работе [8] С.Л.Гладким предпринята попытка создания алгоритма решения проблемы выбора расположения фиктивных канонических областей как оптимизационной задачи. Суть алгоритма состоит в следующем.

Пусть для тела D решается краевая задача. Пусть каким либо образом (например, исходя из интуитивных соображений математика, решающего краевую задачу), выбраны фиктивные области и их начальное расположение. Необходимо изменить положение ФКО с целью обеспечения наилучшего качества решения задачи.

За критерий качества оптимизационной задачи принимается квадратичная ошибка удовлетворения краевым условиям:

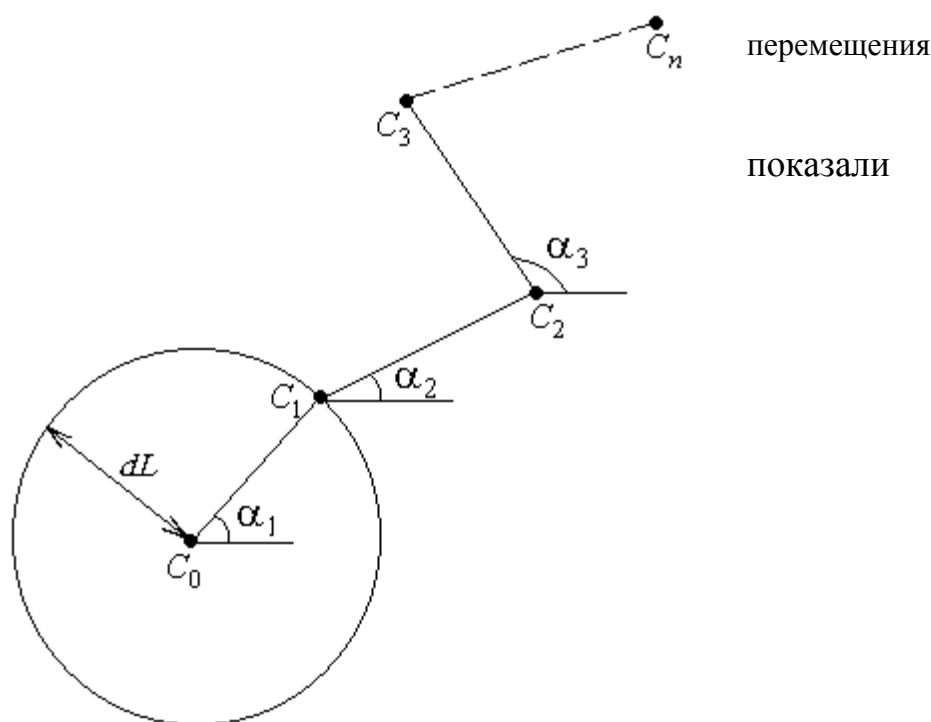
$$\varepsilon = \int_S (B^*(x) - B^{**}(x))^2 dS \quad (23)$$

Пусть начальное расположение некоторой ФКО определено положением ее центра C_0 (рис. 8). Рассматриваются все точки, на расстоянии dL от C_0 . Величина dL является входным параметром алгоритма и задается пользователем в долях характерного размера L тела D . Далее, методом золотого сечения определяется направление перемещения (угол α_1) центра ФКО на расстояние dL , обеспечивающее уменьшение значения выбранного критерия качества. Центр ФКО помещается в найденную точку

C_1 и вычисляется новое значение критерия качества. Если оно окажется меньше, чем в предыдущем положении, то центр ФКО остается в точке C_1 , и далее осуществляются аналогичные действия. Если же значение критерия качества уменьшить не удалось, то величина шага dL уменьшается. Степень уменьшения величины dL также является входным параметром алгоритма. После нескольких итераций по одной ФКО, она перемещается в некоторую точку C_n . Затем рассматриваются другие ФКО, для которых реализуется аналогичный итерационный алгоритм, причем величина начального значения шага dL каждый раз восстанавливается. Процесс последовательного перемещения центров фиктивных областей происходит до тех пор, пока значение критерия качества не уменьшится в заданное число раз, или общее число итераций не превысит максимально допустимое значение.

Рис. 8. Схема последовательного ФКО

Как



вычислительные эксперименты, применение данного оптимизационного алгоритма в ря

1. Результат применения алгоритма зависит от начального приближения: выбранного математиком вида фиктивных канонических областей (круг, кольцо, полость, слой и пр.), их количества, а также количества слагаемых N , удержанных в общих решениях (14), относящихся к фиктивным каноническим областям.

2. Функционал (23) имеет не один, а множество экстремумов, и

поэтому применение описанного оптимизационного алгоритма, который по своей сути является градиентным, позволяет, как правило, находить не глобальный, а какой-либо из множества локальных экстремумов.

В связи с этим, в настоящей работе предпринята попытка построения генетического алгоритма решения указанной оптимизационной задачи, который лишен указанных недостатков.

Генетический алгоритм выбора и расположения фиктивных канонических областей

Генетические алгоритмы являются одним из наиболее молодых разделов искусственного интеллекта [9]. Они берут свое начало от эволюционной теории Дарвина, и в их основе лежит идея использования механизмов естественного отбора и генетического наследования для решения оптимизационных задач. Оптимизационная задача формулируется таким образом, чтобы её решение могло быть представлено в виде вектора («хромосомы»), компонентами которого являются параметры («гены»), характеризующие это решение. Случайным образом создаётся некоторое количество начальных векторов («начальная популяция»). Они оцениваются с использованием некоторого критерия качества решения («функции фитнеса»), в результате чего каждому вектору присваивается определённое значение, которое определяет вероятность выживания организма, представленного данной хромосомой-вектором. После этого с использованием полученных значений функции фитнеса производится «естественный отбор» – выживают «особи», имеющие достаточно высокое значение функции фитнеса. Далее над «выжившими» особями производятся генетические операции – «скрещивание» и «мутации», в результате чего создается «новое поколение». Особи нового поколения также оцениваются с помощью функции фитнеса, затем снова производится селекция, применяются генетические операции и т. д. Так моделируется «эволюционный процесс», продолжающийся несколько жизненных циклов: поколения особей сменяют друг друга до тех пор, пока не будет выполнен критерий остановки алгоритма. Таким критерием может быть: нахождение глобального либо субоптимального решения; исчерпывание числа поколений, отпущенных на эволюцию; исчерпывание времени, отпущенного на вычисления.

Можно выделить следующие этапы генетического алгоритма:

- Создание начальной популяции.
- Определение функции фитнеса для особей популяции.
- Начало цикла эволюции:
 - Выбор индивидов из текущей популяции (селекция).

- Скрещивание и мутация.
- Вычисление функций фитнеса для всех особей.
- Формирование нового поколения.
- Конец цикла эволюции.

При составлении генетического алгоритма оптимизации выбора и расположения ФКО, в качестве функции фитнеса примем функционал (23), являющийся интегральной характеристикой погрешности решения краевой задачи.

Введем понятие *особь*, представив ее в виде следующей структуры:

Название поля	K	Тип ФКО	x	y	N	...	Тип ФКО	x	y	N
Тип данных	Integer	Integer	Real	Real	Integer	...	Integer	Real	Real	Integer

где:

K – Количество ФКО, кодируется целым числом Integer.

Тип ФКО — один из возможных типов ФКО (круг {0}, кольцо {1}, полость {3}, бесконечный слой {4} и т.д.), кодируется целым числом Integer.

x – координата центра ФКО по горизонтальной оси, имеет вещественный тип данных Real.

y – координата центра ФКО по вертикальной оси, имеет вещественный тип данных Real.

N – количество слагаемых, которые удерживаются в общем решении (14), относящемся к ФКО, кодируется целым числом Integer.

Таким образом, понятие особи в нашем случае означает один из вариантов выбора фиктивных канонических областей, генами хромосомы которой являются: количество ФКО, их тип, координаты, задающие пространственную ориентацию ФКО, а также количество слагаемых, удержанных в общих решениях, относящихся к ФКО. Целью работы генетического алгоритма является нахождение такой особи, для которой функция фитнеса (в нашем случае – функционал (23)) имеет самое наименьшее значение – глобальный минимум.

Опробованы два варианта работы генетического алгоритма, названные *непрерывным* и *дискретным*. В непрерывном варианте центр каждой ФКО попадает в любую точку расчетной области краевой задачи. Таким образом, задача нахождения глобального минимума будет определена на бесконечном множестве вариантов расположения ФКО, ограниченном лишь возможностью представления вещественного числа в компьютере. В дискретном варианте перед началом работы алгоритма в расчетной области краевой задачи формируется сетка. В дальнейшем

каждая ФКО в каждой особи должна иметь центр в узле данной сетки. Таким образом, задача нахождения глобального минимума будет определена уже на конечном множестве вариантов расположения ФКО.

В генетическом алгоритме не должны использоваться заведомо некорректные особи, то есть те особи, которые противоречат физическому смыслу задачи. Примером может служить ФКО типа «полость», центр которой находится внутри расчетной области, хотя очевидно, что центр ФКО типа «полость» должен находиться за пределами расчетной области краевой задачи. В генетическом алгоритме реализована проверка особи на корректность.

Начальная популяция особей генерируется случайным образом. Количество особей в популяции задается согласно входным параметрам генетического алгоритма. Количество ФКО и их тип и координаты, а также количество удержанных слагаемых для каждой ФКО генерируется случайным образом.

В соответствие с выбранным вариантом работы алгоритма (непрерывный или дискретный) в области решения задачи выбираются центры ФКО. Если используется непрерывный вариант, то центры ФКО попадают в любую точку расчетной области, причем для координат x и y используется равномерное распределение. Если используется дискретный вариант, то центры ФКО попадают в узловыe точки сетки, вероятность попадания в различные узлы сетки одинакова.

После генерации, каждая особь проходит проверку на корректность. Если особь не является корректной для данной задачи, то происходит регенерация особи.

После расчета значений функции фитнеса по формуле (23) для каждой особи из популяции происходит упорядочивание по значению функции фитнеса. Особь с лучшим значением функции фитнеса занимает первую лидирующую позицию, она не будет подвержена мутациям и обязательно пройдет отбор в следующее поколение, для того чтобы на следующей итерации алгоритма получить не худшее значение для лидирующей особи.

Реализовано два варианта отбора особей для скрещивания.

В первом варианте каждая из особей скрещивается с одной из оставшихся особей, выбираемой случайным образом. Таким образом, в данном варианте в скрещивании участвует каждая особь хотя бы один раз.

Второй вариант называется алгоритмом «рулетки». Для каждой особи формируется значение вероятности для скрещивания. Чем лучше значение функции фитнеса, тем больше значение вероятности для скрещивания. В соответствии с значениями вероятности формируется M

случайных пар, у которых появляется M потомков. В общем случае особи-потомки в алгоритме «рулетки» имеют значение функции фитнеса меньше, чем при первом варианте отбора особей для скрещивания.

После выполнения операции скрещивания происходит проверка полученной особи на корректность. Если особь не корректна для данной задачи, то операция скрещивания перевыполняется заново.

Реализовано пять вариантов оператора скрещивания.

Простой метод. Случайным образом выбирается целое число K в интервале от 1 до M , где M – количество ФКО в особи. Далее в особь-потомок выбираются первые K ФКО из первой особи, остальные ФКО добираются из второй особи.

Плоский метод. Скрещиваются ФКО, находящиеся на соответствующих позициях в особях. Центр новой ФКО выбирается случайным образом из промежутка, образованного центрами ФКО-родителями. Тип новой ФКО выбирается случайным образом из типов, которые были у ФКО-родителей.

Смешанный метод. Скрещиваются ФКО, находящиеся на соответствующих позициях в особях. Центр новой ФКО выбирается случайным образом из промежутка, образованного центрами ФКО-родителями. Данный промежуток увеличивается за счет коэффициента, являющегося параметром метода скрещивания. Тип новой ФКО выбирается случайным образом из типов, которые были у ФКО-родителей.

Дискретный метод. Случайным образом выбирается целое число K в интервале от 1 до M , где M – количество ФКО в особи. Далее в особь-потомок случайным образом включаются K ФКО из первой особи, остальные ФКО добираются из второй особи.

Нечеткий метод. Скрещиваются ФКО, находящиеся на соответствующих позициях в особях. Вероятность попадания центра ФКО-потомка ближе к центру родительской ФКО увеличена.

После выполнения этапа скрещивания выполняется этап мутации. Каждая особь может мутировать с некоторой долей вероятности, являющейся входным параметром генетического алгоритма. При мутации в особи может измениться строго один ген. Случайным образом выбирается ФКО, которая будет подвержена мутации. В выбранной ФКО может измениться тип на один из оставшихся, либо одна из координат центра. Изменение координаты происходит в окрестности исходной координаты.

После выполнения операции мутации происходит проверка полученной особи на корректность. Если особь не корректна для данной задачи, то операция мутации перевыполняется заново.

Далее следует этап селекции. На этом этапе выполняется проверка на

наличие особей-дублей. Если найдена особь-дубль, то она заменяется новой случайной особью. После того, как в популяции не остается ни одной особи-дубля, для каждой из оставшихся особей производится расчет значений функции фитнеса. Особи в популяции сортируются в соответствии со значениями функции фитнеса, и в следующее поколение попадает половина особей с лучшим значением функции фитнеса.

Сравнение генетического и градиентного методов

Задача 1. Требуется найти распределение температур в двусвязной области, изображенной на рис. 9, на внешнем контуре которой задана температура 100°C , а на внутреннем 3320°C .

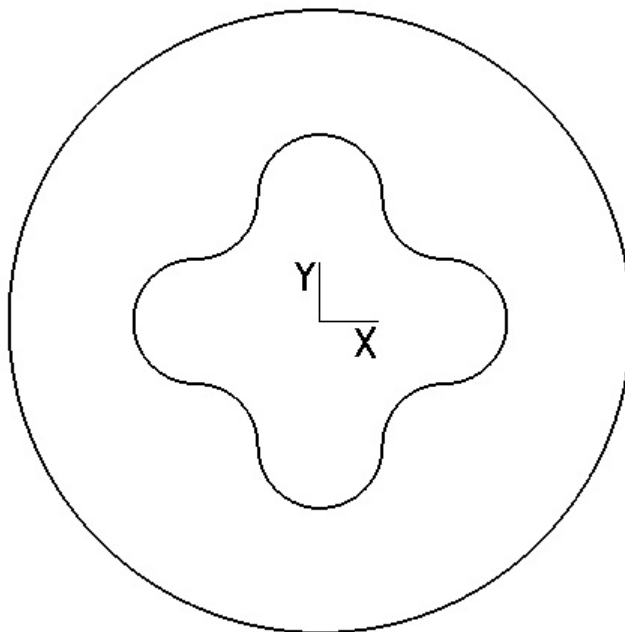


Рис. 9. Двусвязная область, представляющая собой поперечное сечение ракетного твердотопливного двигателя.

Оптимизация градиентным методом. Для того, чтобы решить краевую задачу методом ФКО с использованием градиентного оптимизационного метода, необходимо задать начальное количество, тип и расположение фиктивных канонических областей, а также количество удержанных слагаемых в общих решениях, относящихся к выбранным ФКО. Из опыта решения подобных задач известно, что целесообразно использовать одну ФКО типа «кольцо», для которого общее решение уравнения Лапласа имеет вид (16), и восемь ФКО типа «круговая полость в бесконечном пространстве», для которых общее решение уравнения Лапласа имеет вид (20) или (21). Изначально все ФКО были расположены в начале системы координат.

Для решения оптимизационной задачи градиентным методом было установлено условие выхода при достижении 1000 итераций алгоритма. На первых 20 итерациях была достигнута погрешность $\varepsilon = 0,20\%$, после чего значение погрешности не уменьшалось в течение всего итерационного процесса.

На рис. 10 изображена оптимальная картина расположения ФКО,

полученная градиентным методом.

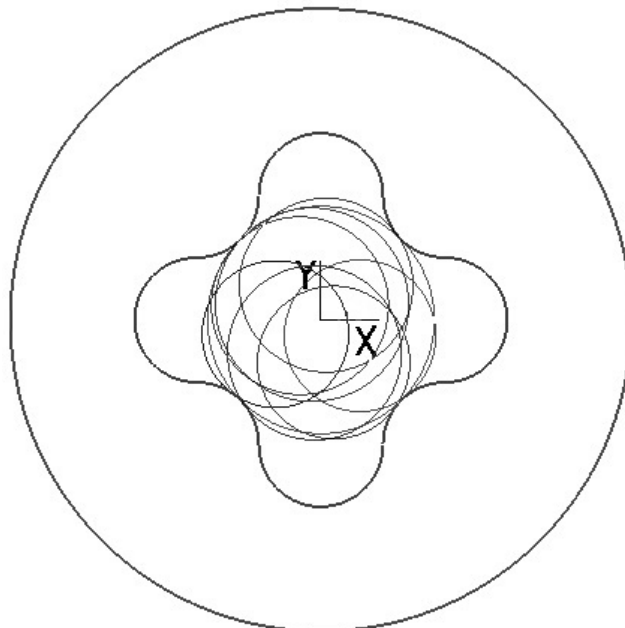


Рис. 10. Картина оптимального расположения ФКО, полученная градиентным методом

Оптимизация с помощью генетического алгоритма. Для решения данной задачи был запущен генетический алгоритм со следующими параметрами:

- количество особей в популяции – 100;
- начальное количество ФКО в особи – 9;
- начальное количество удержанных слагаемых – 20;
- вероятность мутации – 5%;
- максимальное количество поколений – 100.

После смены первых 10-и поколений погрешность решения краевой задачи упала до $\varepsilon = 0,20\%$, т.е. до той величины, которая была достигнута градиентным методом. Далее генетический алгоритм продолжил работу и в итоге после смены 100 поколений была достигнута погрешность $\varepsilon = 0,007\%$, что в 28 раз меньше погрешности, достигнутой градиентным методом.

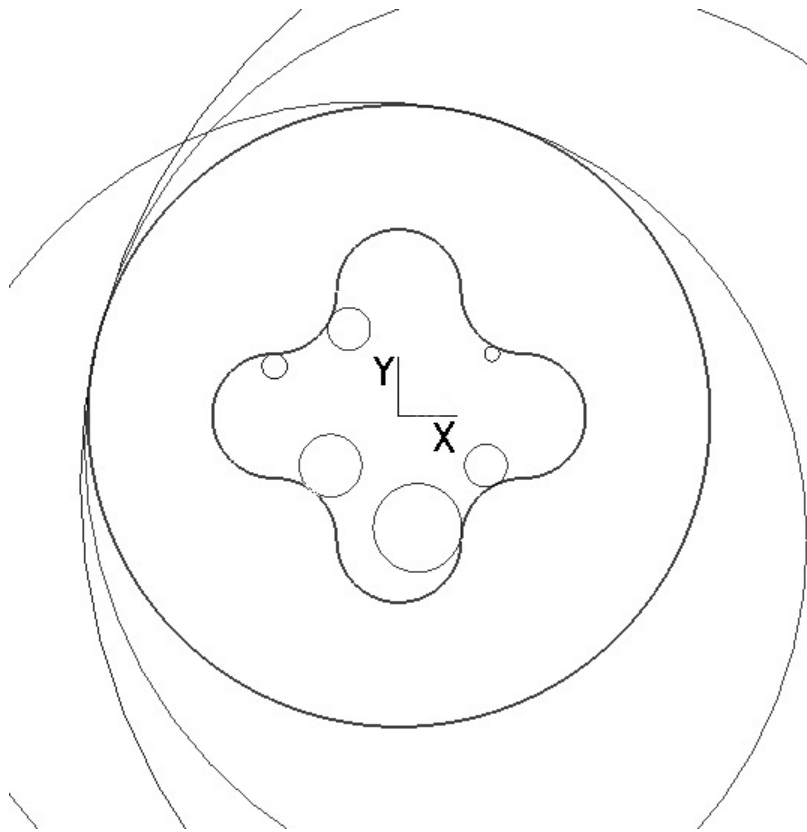


Рис. 11. Картина оптимального расположения ФКО, полученная с помощью генетического алгоритма

Решение краевой задачи в виде распределения изолиний температуры, полученное методом ФКО с использованием генетического алгоритма, приведено на рис. 12.

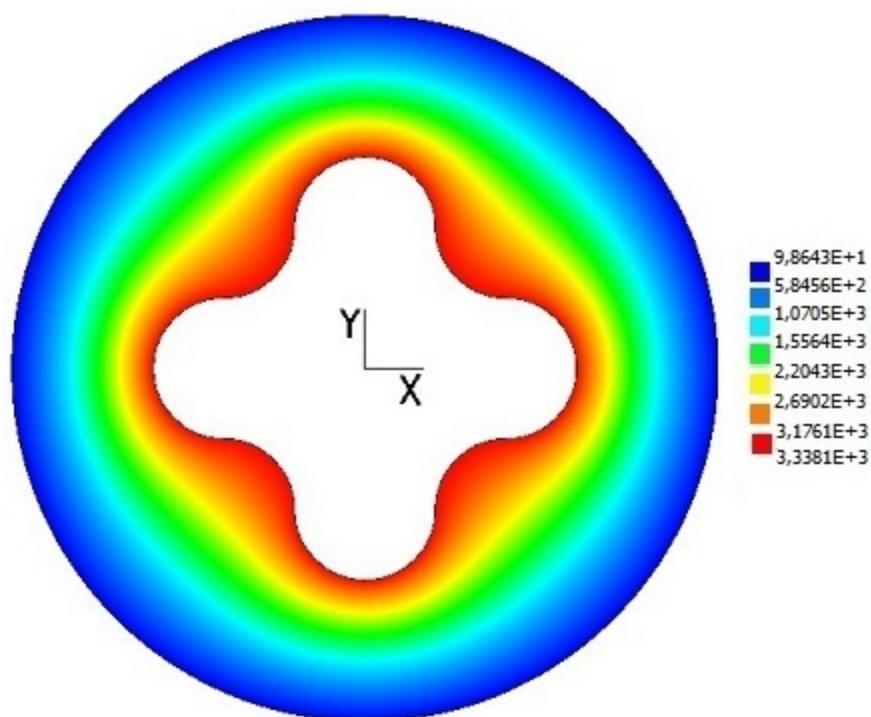


Рис. 12. Решение краевой задачи 1 – распределение изолиний температуры в поперечном сечении твердотопливного ракетного двигателя-ускорителя.

Задача 2. Требуется найти решение краевой задачи теории упругости в двусвязной области, изображенной на рис. 9, внешний контур которой неподвижно закреплен, а на внутреннем контуре задано равномерное распределение давления 152 МПа (1500 атм).

Как и в предыдущем случае при решении задачи методом ФКО использовался градиентный и генетический алгоритмы минимизации функционала граничных условий (23). При этом использовалось общее решение уравнений теории упругости для плоско-деформированного состояния в цилиндрической системе координат (r, θ, z) [8]

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{d_0}{r} - 2(1-2\nu) f_0 r + \sum_{m=2}^{\infty} \cos m \theta \left\{ d_m^1 m r^{m-1} - f_m^2 (m+2-4\nu) r^{-m+1} \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \cos m \theta \left\{ d_m^2 m r^{-m-1} - \right. \\
 &\quad \left. - f_m^1 (m-2+4\nu) r^{m+1} \right\} \\
 u_\theta &= - \sum_{m=2}^{\infty} \sin m \theta \left\{ d_m^1 m r^{m-1} + f_m^2 (m-4+4\nu) r^{-m+1} \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \sin m \theta \left\{ d_m^2 m r^{-m-1} + \right. \\
 &\quad \left. + f_m^1 (m+4-4\nu) r^{m+1} \right\} \\
 u_z &= -c_0 2(1-2\nu) z
 \end{aligned} \tag{24}$$

Из данного решения могут быть получены три типа ФКО: «кольцо» - включает в себя все базисные функции, «круг» - включает только несингулярные функции, «круговая полость в бесконечном пространстве» -

включает только сингулярный базис.

Градиентный метод позволил получить точное аналитическое решение краевой задачи, отличающееся от сформулированных при постановке задачи 2 граничных условий на величину $\varepsilon = 1,75\%$, а генетический алгоритм позволил снизить эту погрешность до значения $\varepsilon = 0,67\%$. Итоговое решение краевой задачи в виде распределения интенсивности напряжений по Мизесу представлено на рис. 13. Здесь отчетливо видна опасная концентрация напряжений (красные изолинии на внутренней поверхности расчетной области), послужившая одной из возможных причин гибели американского космического корабля «Челленджер» в 1986 году.

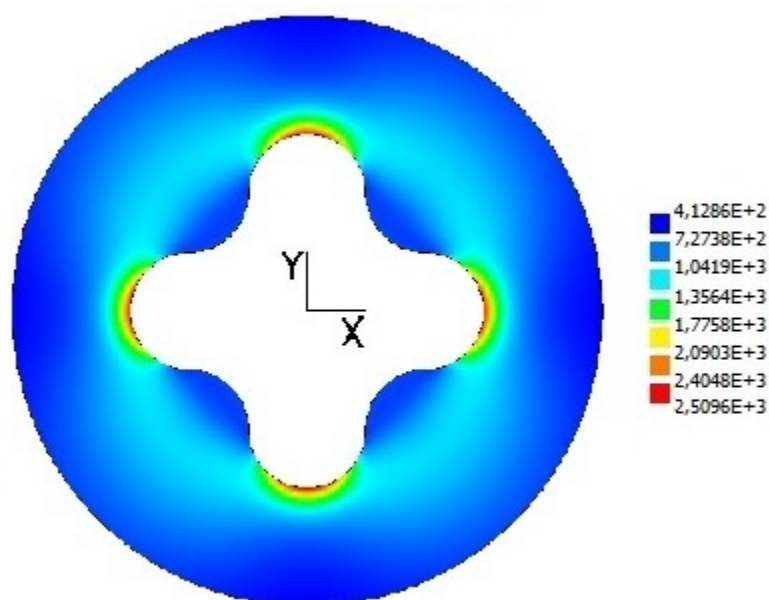


Рис. 13. Решение краевой задачи 2 – распределение интенсивности напряжений по Мизесу в поперечном сечении твердотопливного ракетного двигателя-ускорителя.

Задача 3. Требуется найти решение краевой задачи теории стационарной теплопроводности в объемном цилиндрическом теле с отверстием в боковой стенке, изображенном на рис. 14. На поверхности тела заданы условия третьего рода: на внешней и торцевой поверхностях температура окружающей среды равна 0, на внутренней поверхности и поверхности отверстия – 1. Коэффициент теплоотдачи на всей поверхности задан равным 1 (все значения приведены в безразмерном виде).



Рис. 14. Цилиндрическое тело с отверстием в боковой стенке.

Для применения метода ФКО к решению трехмерных стационарных задач теплопроводности необходимы общие решения уравнения Лапласа для различных объемных канонических областей – сферы, цилиндра и т.д. Воспользуемся общими решениями, приведенными в [6], полученными методом разделения переменных Фурье. Согласно [6] общее решение уравнения Лапласа в сферической системе координат (r, φ, θ) может быть представлено в следующем виде:

$$T(r, \varphi, \theta) = c_0 + c_1 t_1(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^4 c_{nmi} t_{nmi}(r, \varphi, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=5}^6 c_{n0i} t_{n0i}(r, \theta),$$

$$t_1(r) = \frac{1}{r},$$

$$t_{nm1}(r, \varphi, \theta) = r^n \sin(m\varphi) P_n^m(\cos(\theta)),$$

$$t_{nm2}(r, \varphi, \theta) = r^n \cos(m\varphi) P_n^m(\cos(\theta)), \quad (25)$$

$$t_{nm3}(r, \varphi, \theta) = \frac{\sin(m\varphi) P_n^m(\cos(\theta))}{r^{n+1}},$$

$$t_{nm4}(r, \varphi, \theta) = \frac{\cos(m\varphi) P_n^m(\cos(\theta))}{r^{n+1}},$$

$$t_{n05}(r, \theta) = r^n P_n(\cos(\theta)),$$

$$t_{n06}(r, \theta) = \frac{P_n(\cos(\theta))}{r^{n+1}},$$

где P_n – полиномы Лежандра, P_n^m – присоединенные функции Лежандра.

Данное решение является общим для полый сферы, то есть подбором коэффициентов данного решения можно удовлетворить достаточно произвольным граничным условиям на поверхности полый сферы произвольных внешнего и внутреннего радиуса. Если в данном решении

оставить только несингулярные базисные функции, то получим общее решение для шара, если только сингулярные – общее решение для сферической полости в бесконечном пространстве.

Далее, согласно [6] общее решение уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат (r, φ, z) может быть представлено в следующем виде:

$$T(r, \varphi, z) = c_0 + c_1 t_1(r) + c_2 t_2(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{16} c_{nmi} t_{nmi}(r, \varphi, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=17}^{24} c_{n0i} t_{n0i}(r, z) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=25}^{28} c_{0mi} t_{0mi}(r, \varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=29}^{32} c_{0mi} t_{0mi}(r, \varphi, z),$$

$$t_1(r) = \ln(r),$$

$$t_2(z) = z,$$

$$t_{nm1}(r, \varphi, z) = I_m(\mu r) \sin(m \varphi) \sin(\mu z),$$

$$t_{nm2}(r, \varphi, z) = I_m(\mu r) \sin(m \varphi) \cos(\mu z),$$

$$t_{nm3}(r, \varphi, z) = I_m(\mu r) \cos(m \varphi) \sin(\mu z),$$

$$t_{nm4}(r, \varphi, z) = I_m(\mu r) \cos(m \varphi) \cos(\mu z),$$

$$t_{nm5}(r, \varphi, z) = K_m(\mu r) \sin(m \varphi) \sin(\mu z),$$

$$t_{nm6}(r, \varphi, z) = K_m(\mu r) \sin(m \varphi) \cos(\mu z),$$

$$t_{nm7}(r, \varphi, z) = K_m(\mu r) \cos(m \varphi) \sin(\mu z),$$

$$t_{nm8}(r, \varphi, z) = K_m(\mu r) \cos(m \varphi) \cos(\mu z),$$

$$t_{nm9}(r, \varphi, z) = J_m(\mu r) \sin(m \varphi) \sinh(\mu z),$$

$$t_{nm10}(r, \varphi, z) = J_m(\mu r) \sin(m \varphi) \cosh(\mu z),$$

$$t_{nm11}(r, \varphi, z) = J_m(\mu r) \cos(m \varphi) \sinh(\mu z),$$

$$t_{nm12}(r, \varphi, z) = J_m(\mu r) \cos(m \varphi) \cosh(\mu z),$$

$$t_{nm13}(r, \varphi, z) = Y_m(\mu r) \sin(m \varphi) \sinh(\mu z),$$

$$t_{nm14}(r, \varphi, z) = Y_m(\mu r) \sin(m \varphi) \cosh(\mu z),$$

$$t_{nm15}(r, \varphi, z) = Y_m(\mu r) \cos(m \varphi) \sinh(\mu z),$$

$$t_{nm16}(r, \varphi, z) = Y_m(\mu r) \cos(m \varphi) \cosh(\mu z),$$

$$t_{n017}(r, z) = I_0(\mu r) \sin(\mu z), \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
t_{n018}(r, z) &= I_0(\mu r) \cos(\mu z), \\
t_{n019}(r, z) &= K_0(\mu r) \sin(\mu z), \\
t_{n020}(r, z) &= K_0(\mu r) \cos(\mu z), \\
t_{n021}(r, z) &= J_0(\mu r) \sinh(\mu z), \\
t_{n022}(r, z) &= J_0(\mu r) \cosh(\mu z), \\
t_{n023}(r, z) &= Y_0(\mu r) \sinh(\mu z), \\
t_{n024}(r, z) &= Y_0(\mu r) \cosh(\mu z), \\
t_{0m25}(r, \varphi) &= r^m \sin(m \varphi), \\
t_{0m26}(r, \varphi) &= r^m \cos(m \varphi), \\
t_{0m27}(r, \varphi) &= r^{-m} \sin(m \varphi), \\
t_{0m28}(r, \varphi) &= r^{-m} \cos(m \varphi), \\
t_{0m29}(r, \varphi, z) &= r^m \sin(m \varphi) z, \\
t_{0m30}(r, \varphi, z) &= r^m \cos(m \varphi) z, \\
t_{0m31}(r, \varphi, z) &= r^{-m} \sin(m \varphi) z, \\
t_{0m32}(r, \varphi, z) &= r^{-m} \cos(m \varphi) z,
\end{aligned}$$

где $\mu = \frac{\pi n}{L}$, L – период изменения температуры по оси z , I_m, K_m, J_m, Y_m – функции Бесселя.

Данное решение является общим для полого цилиндра. Если в этом решении оставить только несингулярные базисные функции, то получим общее решение для сплошного цилиндра, если только сингулярные – решение для цилиндрической полости в бесконечном пространстве. Решения, содержащие тригонометрические функции координаты z соответствуют решению для длинного цилиндра, гиперболические функции – решению для короткого цилиндра.

Согласно методу ФКО, заданное тело должно быть погружено в область пересечения фиктивных канонических областей, в данном случае оно погружалось в «полые сферы» и «сферические полости в бесконечном пространстве», для которых общие решения уравнения Лапласа определены в (25). В результате работы генетического алгоритма было найдено оптимальное расположение ФКО: заданное тело оказалось погруженным

в область пересечения одной «полой сферы» V_1 и четырех «сферических полостей в бесконечном пространстве» V_2, V_3, V_4, V_5 , как показано на рис. 15.

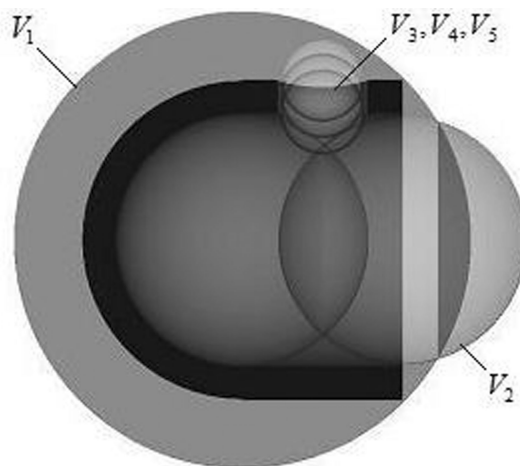


Рис. 15. Схема погружения заданного тела в пересечение ФКО – «полой сферы» V_1 и «сферических полостей в бесконечном пространстве» V_2, V_3, V_4, V_5 (сечение в середине отверстия).

Результаты решения задачи представлены на рис. 16 и рис. 17. Максимальная погрешность удовлетворения граничным условиям по тепловому потоку составила менее 1%.

Отметим, что в инженерных расчетах такая погрешность может рассматриваться как следствие идеализации реальных граничных условий, поскольку все граничные условия задаются с некоторой допустимой точностью. То есть, данное решение является точным для некоторых скорректированных граничных условий, которые незначительно (менее 1%) отличаются от исходных.

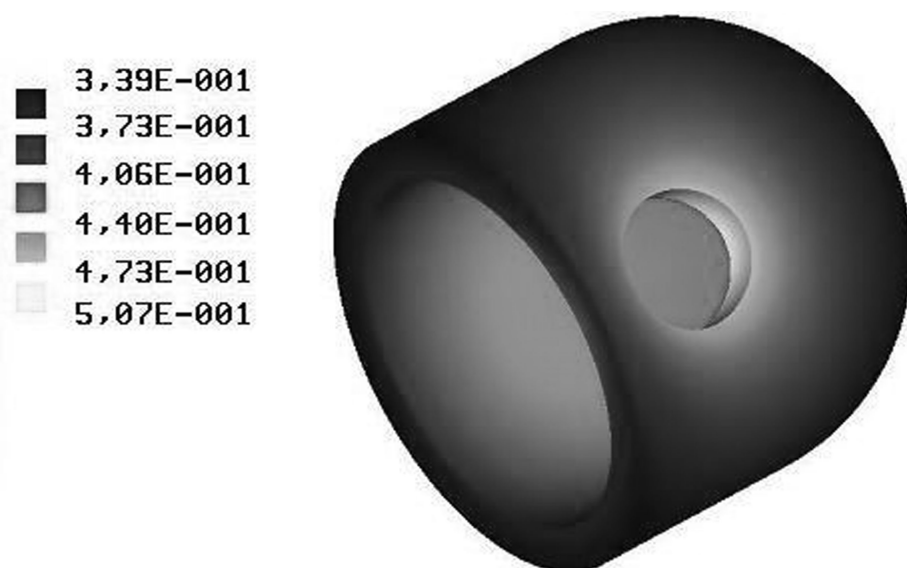


Рис. 16. Распределение температуры.

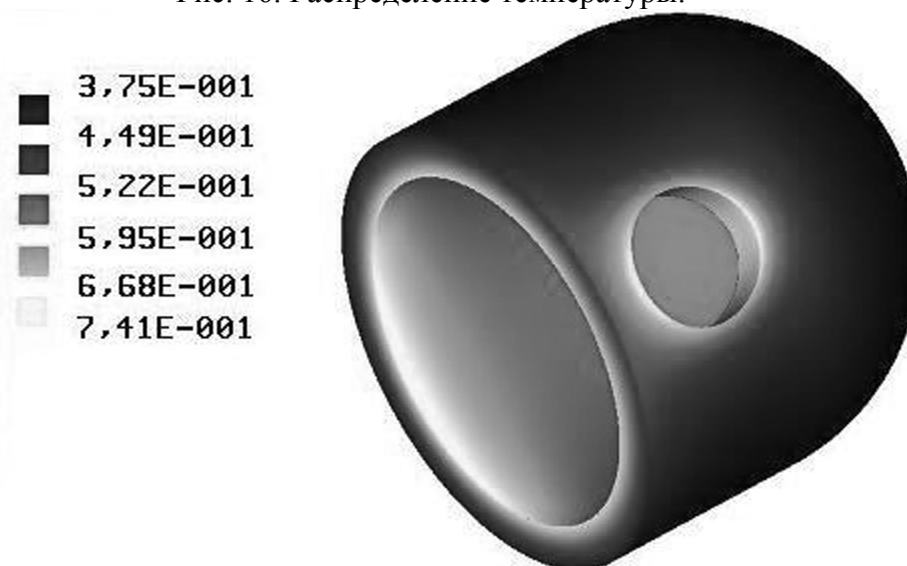


Рис. 17. Распределение теплового потока.

Заключение

Аналитические методы решения краевых задач (приводящие к решениям в виде аналитических выражений, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям и краевым условиям), более надежны, чем численные методы (приводящие к решениям в виде массивов чисел). С другой стороны, аналитические методы сложнее в реализации, чем численные методы. Как показано в данной статье, эффективным инструментом при реализации аналитических методов являются приемы искусственного интеллекта, в частности – технология генетических алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ясницкий Л.Н., Данилевич Т.В. Современные проблемы науки. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 294с.
2. Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren // Verhandl des 2. Intern. Kongress für technische Mechanik. – Zurich, Sept., 1926. – P. 12-17.
3. Ясницкий Л.Н. Об одном способе решения задач теории гармонических функций и линейной теории упругости. – Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. Пермь. Изд. Пермского политехнического ин-та. – 1973. – С. 78-83.
4. Yasnitsky L.N. Fictitious Canonic Region Method. – Southampton-Boston: Computational Mechanics Publications, 1994. – 120p.
5. Гусман С.Я., Ясницкий Л.Н. Обоснование выбора фиктивных канонических областей. – Вестник Пермского университета. 1994. Вып.1. С.55-65.
6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
7. Ясницкий Л.Н. Суперпозиция базисных решений в методах типа Треффтца. – Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1989. №2. С.95-101.
8. Гладкий С.Л., Степанов Н.А., Ясницкий Л.Н. Интеллектуальное моделирование физических проблем. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 200 с.
9. Ясницкий Л.Н. Введение в искусственный интеллект. Издание 3. М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 176с.